

I. 次の各問いに答えなさい。

(1) $|\sqrt{5}-2|+|\sqrt{5}-5|$ を計算しなさい。

[解] 3.

絶対値内の正負を確認すると，
(与式) $= (\sqrt{5}-2) - (\sqrt{5}-5) = 3$ と求められる。

(2) $\left(\frac{3}{2}a-b+2\right)(4a-3)$ を展開しなさい。

[解] $6a^2+\frac{7}{2}a-4ab+3b-6.$

分配法則を用いて一つひとつ展開をしていく。
(与式) $= 6a^2-\frac{9}{2}a-4ab+3b+8a-6$
 $= 6a^2+\frac{7}{2}a-4ab+3b-6.$

(3) $xy-y-xz+z$ を因数分解しなさい。

[解] $(x-1)(y-z).$

(与式) $= y(x-1)-z(x-1)$
 $= (x-1)(y-z).$

II. 次の各問いに答えなさい。

(1) 5 個の数 $0, 1, 2, 3, 4$ を 3 つ並べてできる 3 桁の数は全部で何個あるか求めなさい。
(ただし，同じ数を 2 回以上用いてはいけない。)

[解] 48 個.

最上位の桁 百の位は 0 以外の数である必要があるため，1～4 までの 4 通りである。

残りの十の位，一の位の 2 桁分は残りの 4 つの数から 2 つを選べばよいため，
 ${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$ 通りとなる。
したがって， $4 \times 12 = 48$ 個となる。

(2) 赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている袋の中から，3 個玉を取り出したとき，赤玉が 2 個以上となる確率を求めなさい (ただし，一度取り出した玉は袋の中に戻さない。)

[解] $\frac{4}{5}.$

全体の 6 個から 3 個を取り出す組み合わせは， ${}_6C_3 = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ 通り。

取り出した 3 つがすべて赤玉である組み合わせは， ${}_4C_3 = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4$ 通り。

取り出した 3 つのうち赤玉が 2 つ (白玉が 1 つ) である組み合わせは，
 ${}_4C_2 \times {}_2C_1 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \times \frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} = 6 \times 2 = 12$ 通り。

したがって，求める確率は， $\frac{4+12}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ となる。

(3) 60 と 63 の最小公倍数を求めなさい。

[解] 1, 260.

各値を素因数分解すると，以下の通りとなる。

$60 = 3 \times 20 = 2^2 \times 3 \times 5.$
 $63 = 7 \times 9 = 3^2 \times 7.$

したがって，求める最小公倍数は， $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1, 260.$

III. 次の各問いに答えなさい。

(1) 980^2 を求めなさい。

【 解 】 $960,400.$

$980^2 = (1,000 - 20)^2$ と変形し展開公式を用いて計算する。

$$\begin{aligned} 980^2 &= (1,000 - 20)^2 &&= 1,000^2 + 2 \times 1,000 \times (-20) + (-20)^2 \\ &= 1,000,000 - 40,000 + 400 \\ &= 960,400. \end{aligned}$$

(2) 放物線 $y = -2x^2 - 8x - 3$ の頂点の座標を求めなさい。

【 解 】 $(x, y) = (-2, 5).$

放物線の方程式を標準形 $y = a(x - p)^2 + q$ に変形し，頂点の座標 $(x, y) = (p, q)$ を求める。

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 8x - 3 \\ &= -2(x^2 + 4x) - 3 \\ &= -2(x + 2)^2 - (-2) \times 4 - 3 \\ &= -2(x + 2)^2 + 5. \end{aligned}$$

したがって，求める頂点の座標は， $(x, y) = (-2, 5).$

IV. 5 人の生徒に試験を実施したところ，成績は「63 点，64 点，55 点，67 点，51 点」であった。
次の各問いに答えなさい。

(1) この 5 つのデータの標準偏差を求めなさい。

【 解 】 $6.$

平均： $\mu = \frac{1}{5}(63 + 64 + 55 + 67 + 51) = 60.$

分散： $s^2 = \frac{1}{5}\{(63 - 60)^2 + (64 - 60)^2 + \cdots + (51 - 60)^2\} = \frac{9 + 16 + 25 + 49 + 81}{5} = \frac{180}{5} = 36.$

したがって，求める標準偏差は， $s = 6.$

(2) この試験において，解答が出ない出題ミスがあり，その問題は全員を正解にすることにし，全員の成績が 5 点分上昇した。得点が訂正された後の標準偏差を求めなさい。

【 解 】 $6.$

変量に対して一定数のみを加えたとしても，全体が情報に 5 点ずつシフトするため「ばらつき」を表す標準偏差は不変である。

したがって，求める標準偏差は， $s = \sqrt{36} = 6.$

V. 次の各問いに答えなさい。

(1) 方程式 $\frac{6x+2y}{9} = -\frac{2x-y}{2} = 1$ を解きなさい。

〔 解 〕 $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$.

問題の式を変形すると、連立方程式 $\begin{cases} \frac{6x+2y}{9} = 1 \\ -\frac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$ となる。すなわち、この連立方程式を解けばよい。

もう少し整理し、 $\begin{cases} 6x+2y = 9 \\ 2x-y = -2 \end{cases}$ を解く。

$6x+2(2x+2)=9.$ $\therefore x=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$ $y=2x+2$ より、 $y=2\cdot\frac{1}{2}+2=1+2=3.$

(2) 不等式 $ax^2-2x+a>0$ が実数解をもつように、実数 a の値の範囲を求めなさい。

〔 解 〕 $a>-1$.

実数 a について、場合分けをして考える。

$a=0$ の場合：
 $-2x>0$ の一次不等式になり、 $x<0$ との解をもつ。

$a>0$ の場合：
 $y=ax^2-2x+a$ のグラフは下に凸であり、常に何らかの解は存在する。

また、 $x=0$ においては、 $a>0$ であるため、 $x=0$ は任意の a において必ず不等式の解になっている。

$a<0$ の場合：
解をもつ条件は、判別式 $D>0$ になるような a の範囲を求めればよい。

$D=(-2)^2-4\cdot a\cdot a=4-4a^2>0.$

すなわち、 $a^2-1=(a+1)(a-1)<0$ より、 $-1<a<1$ であるが、この場合分けの前提として $a<0$ であるから、 $-1<a<0$ となる。

以上の 3 つの場合分けを統合すると、求める解は $a>-1$ となる。

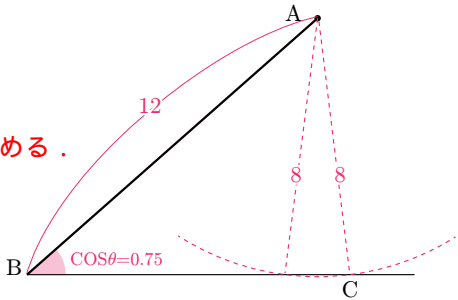
VI. $\triangle ABC$ において、辺 $AB=12$ 、辺 $AC=8$ 、 $\cos\angle ABC=0.75$ のとき、次の各問いに答えなさい。

(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

〔 解 〕 辺 $BC=8$ または、 10 .

余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ac\cdot\cos B$ を用いて、辺 BC 、すなわち左式の a を求める。

$8^2 = 12^2 + a^2 - 2 \times a \times 12 \times 0.75$
 $64 = 144 + a^2 - 18a$
 $0 = a^2 - 18a + 80$
 $0 = (a-8)(a-10) \qquad \therefore a=8, 10.$



(2) $\angle BCA$ が鋭角のとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

〔 解 〕 $15\sqrt{7}$.

$\angle BCA$ が鋭角であるとは、 $\cos\angle BCA>0$ となれば良いため、余弦定理を用いて確認する。

辺 $BC=8$ のとき： $\cos\angle BCA = \frac{8^2+8^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 8} = \frac{64+64-144}{128} = -\frac{16}{128} = -\frac{1}{8}$
辺 $BC=10$ のとき： $\cos\angle BCA = \frac{10^2+8^2-12^2}{2\cdot 10\cdot 8} = \frac{100+64-144}{160} = \frac{20}{160} = \frac{1}{8}$

したがって、辺 $BC=8$ のときは、 $\angle BCA$ は鈍角であり、辺 $BC=10$ のときは、 $\angle BCA$ は鋭角である。

また、 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より、 $\sin\angle ABC=\sqrt{1-0.75^2}=\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ と求められる。

($\angle ABC$ は、三角形の 1 つの角であることから、明らかに $0^\circ<\angle ABC<180^\circ$ であり、 $\sin\angle ABC>0$ である。)

以上から、求める $\triangle ABC$ の面積 $=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=15\sqrt{7}.$

(3) (2) の $\triangle ABC$ に対する、外接円の半径の長さを求めなさい。

〔 解 〕 $\frac{16\sqrt{7}}{7}$.

外接円の半径 R を求めたいため、正弦定理を用いる。

$2R=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{8}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{32}{\sqrt{7}}=\frac{32\sqrt{7}}{7}.$ $\therefore R=\frac{16\sqrt{7}}{7}.$