

I. 次の各問いに答えなさい。

(1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ を計算しなさい。

[解] $\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$

(与式) $= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{3-1} - \frac{\sqrt{15}-3}{5-3}$
 $= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{15}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}.$

(2) $(3x+2y-1)(x-2y)$ を展開しなさい。

[解] $3x^2-4xy-x-4y^2+2y.$

(与式) $= 3x^2-6xy+2xy-4y^2-x+2y = 3x^2-4xy-x-4y^2+2y.$

(3) $2a^2-\frac{5}{3}ab-2b^2$ を因数分解しなさい。

[解] $\frac{1}{3}(3a+2b)(2a-3b).$ $\left(a+\frac{2}{3}b\right)(2a-3b), (3a+2b)\left(\frac{2}{3}a-b\right)$ でも可。

(与式) $= \frac{1}{3}(6a^2-5ab-6b^2)$ と整理する。

$6a^2-5ab-6b^2$ については，たすき掛けによって $\begin{bmatrix} 3a & 2b \\ 2a & -3b \end{bmatrix}$ 下記の通り因数分解可能。

(与式) $= \frac{1}{3}(3a+2b)(2a-3b).$

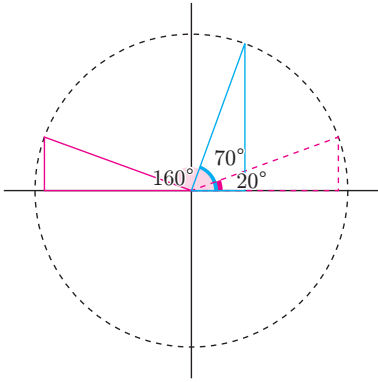
II. 次の各問いに答えなさい。

(1) $(\sqrt{3}\sin 70^\circ)^2 + (\sqrt{3}\sin 160^\circ)^2$ の値を求めなさい。

[解] 3.

$\sin(90^\circ-\theta) = \cos \theta$ より， $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ.$
 $\sin(180^\circ-\theta) = \sin \theta$ より， $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ.$

(与式) $= (\sqrt{3}\cos 20^\circ)^2 + (\sqrt{3}\sin 20^\circ)^2 = 3(\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) = 3 \times 1 = 3.$



(2) 144 の正の約数の個数を求めなさい。

[解] 15 個.

144 を素因数分解すると， $144 = 2 \times 72 = 2^2 \times 36 = 2^2 \times 6^2 = 2^2 \times (2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2$ となる。

正の約数は，素因数の積の組み合わせになっているため，
素因数 2 が 0 個～4 個の場合の 5 通りと，素因数 3 が 0 個～2 個の場合の 3 通りの組み合わせとなる。

したがって，求める解は， $(4+1) \times (2+1) = 5 \times 3 = 15.$

(3) $77_{(10)}$ を 7 進法で表しなさい。

[解] $140_{(7)}.$

77 を 7 で割った余りを解の桁から順に並べていけば良い。

$77 \div 7 = 11 \dots 0$
 $11 \div 7 = 1 \dots 4$
 $1 \div 7 = 0 \dots 1$

したがって，求める解は， $140_{(7)}.$

III. 次の各問いに答えなさい。

- (1) 赤色と白色の 2 個の均質なさいころを同時に投げるとき，出た目の和が 4 の倍数になる場合は，何通りあるか求めなさい。

〔 解 〕 9 通り.

すべてのパターンを数え上げていく。

出た目の和が 4 の場合 : (1, 3), (2, 2), (3, 1)
出た目の和が 8 の場合 : (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)
出た目の和が 12 の場合 : (6, 6)

したがって，求める解は，9 通り。

- (2) あるプロバスケットボールチームは，日本国籍選手 9 名と外国籍選手 3 名の計 12 名である。試合中，コート上の選手は 5 人であるが，外国籍選手は 2 名以下とする条件がある。コート上の選手の選び方は何通りあるか求めなさい。

〔 解 〕 756 通り.

外国籍選手の出場人数別に考え，それをすべて足し合わせれば良い。

外国籍選手が 0 名の場合 (日本国籍選手が 5 名の場合): ${}_9C_5$.
外国籍選手が 1 名の場合 (日本国籍選手が 4 名の場合): ${}_3C_1 \times {}_9C_4$.
外国籍選手が 2 名の場合 (日本国籍選手が 3 名の場合): ${}_3C_2 \times {}_9C_3$.

したがって，求める解は，

$$\begin{aligned} & {}_9C_5 + ({}_3C_1 \times {}_9C_4) + ({}_3C_2 \times {}_9C_3) \\ = & \frac{9!}{5!(9-5)!} + \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{9!}{4!(9-4)!} + \frac{3!}{2!(3-2)!} \times \frac{9!}{3!(9-3)!} \\ = & \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + 3 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + 3 \times \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \\ = & 9 \times 7 \times 2 + 9 \times 7 \times 6 + 9 \times 4 \times 7 \\ = & (9 \times 7) \times (2 + 6 + 4) = 63 \times 12 = 756. \end{aligned}$$

- (3) 箱の中に赤色の玉が 6 個，白色の玉が 4 個入っている。箱の中から 2 個の玉を取り出すとき，取り出した赤色の玉の個数の期待値を求めなさい。ただし，一度取り出した玉は箱の中に戻さない。

〔 解 〕 1.2 個.

取り出す赤色の玉の個数を X とし， X の各値と各 X の確率は次の表のとおりとなる。

X	0 (白 2 個)	1 (赤白, 白赤)	2 (赤 2 個)
p	$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$	$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{48}{90}$	$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90}$

したがって，求める期待値は， $0 \times \frac{12}{90} + 1 \times \frac{48}{90} + 2 \times \frac{30}{90} = \frac{108}{90} = 1.2$.

1 個取り出す際の期待値が 0.6 (10 個中 6 個) のため，2 個取り出す際の期待値はその 2 倍の 1.2 となる。

IV. 次の各問いに答えなさい。

- (1) 2 次関数 $y = -mx^2 + mx - 2$ のグラフが x 軸と異なる 2 点の共有点をもつように，定数 m の範囲を求めなさい。

〔 解 〕 $m < 0$, $m > 8$.

x 軸と異なる 2 点の共有点をもつためには，判別式において $D > 0$ を満たすよう定数 m の範囲を定めれば良い。
すなわち，

$$D = m^2 - 4 \times (-m) \times (-2) = m^2 - 8m = m(m - 8) > 0.$$

したがって，求める定数 m の範囲は， $m < 0$, $m > 8$ となる。

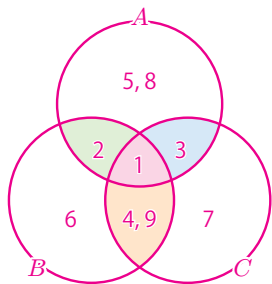
- (2) 集合 A, B, C について， $A \cap B = \{1, 2\}$ ， $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ， $A \cap C = \{1, 3\}$ ， $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ で， $B \cap C = \{1, 4, 9\}$ とするとき， $B \cup C$ を求めなさい。

〔 解 〕 $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

$A \cap B = \{1, 2\}$ と $A \cap C = \{1, 3\}$ より， $A \cap B \cap C = \{1\}$ とわかる。
また，緑色部分は $\{2\}$ ，青色部分は $\{3\}$ とわかる。

また， $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ と $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ から，
6 は，集合 B のみの含まれる要素，
7 は，集合 C のみの含まれる要素であることもわかる。

$B \cap C = \{1, 4, 9\}$ と $A \cap B \cap C = \{1\}$ より，
橙色部分は $B \cap C = \{4, 9\}$ とわかり，
残りの 5 と 8 は，集合 A のみの含まれる要素であることもわかる。



以上をまとめると，右のベン図となることから，
求める $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ となる。

V. 下の表は，日本国内の 2 人以上世帯を 100 世帯ランダムに選んで金融資産保有額を調査した結果である．
次の各問いに答えなさい．ただし，階級値は 1 万円未満を四捨五入し，1 万円単位とする．

表．家計の金融資産保有状況		
金融資産保有額		世帯数
	0 円	26
1 円以上	100 万円未満	10
100 万円以上	200 万円未満	8
200 万円以上	300 万円未満	5
300 万円以上	400 万円未満	5
400 万円以上	500 万円未満	3
500 万円以上	600 万円未満	4
600 万円以上	700 万円未満	2
700 万円以上	800 万円未満	2
800 万円以上	900 万円未満	2
900 万円以上	1,000 万円未満	2
1,000 万円以上	1,200 万円未満	4
1,200 万円以上	1,400 万円未満	3
1,400 万円以上	1,600 万円未満	2
1,600 万円以上	2,000 万円未満	3
2,000 万円以上	3,000 万円未満	6
3,000 万円以上	5,000 万円未満	6
5,000 万円以上	1 億円未満	7

(1) 最頻値が存在する階級値を答えなさい．

[解] 0 円.

最頻値は最も度数が多い階級のため，0 円の階級となる．その階級値も 0 円となる．

(2) 中央値が存在する階級値を答えなさい．

[解] 350 万円.

データ数が 100 個であることから中央値は，50 番目と 51 番目が含まれる階級を探せば良い．
小さい階級の度数を順に加えていくと，200 万円以上 300 万円未満の階級までで， $26 + 10 + 8 + 5 = 49$ となっている．
したがって，50 番目と 51 番目が含まれる階級は，300 万円以上 400 万円未満の階級で，その階級値は 350 万円となる．

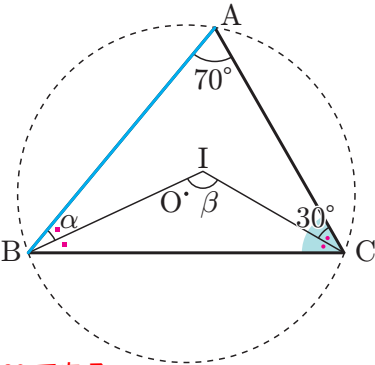
(3) 平均値を求めなさい．

[解] 1, 228 万 5 千円.

度数分布表の平均の求め方は，階級値 $\times$ 度数 をすべての階級で足し合わせ，全体の度数 100 で割れば良い．

したがって，平均値 $= \frac{0 \times 26 + 50 \times 10 + \cdots + 4, 000 \times 6 + 7, 500 \times 7}{100} = \frac{122, 850}{100} = 1, 228.5$

VI. 右の図において，点 I は， $\triangle ABC$ の内心であり，円 O は $\triangle ABC$ の外接円である．
 $\angle BAC = 70^\circ$ ， $\angle ACI = 30^\circ$ のとき，次の各問いに答えなさい．



(1) $\angle ABI$ の角度 α を求めなさい．

[解] 25° .

点 I が内心のため，線分 BI および線分 CI は，
それぞれ $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ の二等分線になっている．

したがって， $\angle BCI = \angle ACI = 30^\circ$ となり， $\angle ABC = 180^\circ - 70^\circ - 2 \times 30^\circ = 50^\circ$ である．
以上のことから， $\angle ABI = \frac{1}{2} \angle ABC = 25^\circ$ ．

(2) $\angle BIC$ の角度 β を求めなさい．

[解] 125° .

$\angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle BCI = 180^\circ - 25^\circ - 30^\circ = 125^\circ$ ．

(3) 辺 AB の長さを $5\sqrt{3}$ とするとき，円 O の半径の長さを求めなさい．

[解] 5.

円 O は， $\triangle ABC$ の外接円であることから，正弦定理を用いることで円 O の半径 R は求められる．

$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{5\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{3}} = 10 = 2R$$

したがって，求める円 O の半径は 5.