令和６年度 長岡大学 一般選抜 III 期（数学）【解答例】

問題兼解答用紙は３枚です．すべての問題兼解答用紙に必ず受験番号，氏名を記入してください．

受験番号 ＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿

I. 次の各問いに答えなさい．

(1) $(x-2)^2(x+1)(x-5)$ を展開しなさい．

［解］ $x^4-8x^3+15x^2+4x-20.$

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x^2-4x+4)(x^2-4x-5) \qquad (X=x^2-4x \text{ と置く}) \\ &= (X+4)(X-5) \\ &= X^2-X-20 \\ &= (x^2-4x)^2-(x^2-4x)-20 \\ &= x^4-8x^3+16x^2-x^2+4x-20 \\ &= x^4-8x^3+15x^2+4x-20.\end{aligned}$$

(2) $6x^2+5xy-4y^2$ を因数分解しなさい．

［解］ $(3x+4y)(2x-y).$

たすき掛けによって $\begin{bmatrix} 3x & 4y \\ 2x & -y \end{bmatrix}$ 下記の通り因数分解可能．

$(\text{与式})=(3x+4y)(2x-y).$

(3) 2 次方程式 $3x^2+4x-2=0$ の解を α,β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めなさい．

［解］ $\dfrac{28}{9}.$

解の公式によって 2 次方程式の解を求めると，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\times(-2)}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}.$$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ と書き直せることから，

$$\begin{aligned}\text{求める解}\alpha^2+\beta^2 &= \left(\frac{-2+\sqrt{10}}{3}+\frac{-2-\sqrt{10}}{3}\right)^2-2\cdot\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{-2-\sqrt{10}}{3} \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\frac{4-10}{9} \\ &= \frac{16}{9}+\frac{12}{9} \\ &= \frac{28}{9}.\end{aligned}$$

II. 次の各問いに答えなさい．

(1) 連立不等式 $\begin{cases} x^2-1 > 0 & \ldots \text{式}(\alpha) \\ 4(x-1) > 3(x-2) & \ldots \text{式}(\beta) \end{cases}$ を解きなさい．

［解］ $-2<x<-1,\quad x>1.$

まずはそれぞれの式について不等式を解いていく．

式 (α) ： $(x+1)(x-1) > 0$
$x<-1,\quad x>1.$

式 (β) ： $4x-4 > 3x-6$
$x > -2.$

上記の 2 式の解が共に満たされる範囲が求める連立方程式の解となることから，$-2<x<-1,\quad x>1$ となる．

(2) $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}$ の値を求めなさい．

［解］ $-\dfrac{\sqrt{2}}{8}.\ \left(\text{または}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\right)$

与式の両辺を 2 乗すると，$\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}.$ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より，$\cos\theta\sin\theta=-\dfrac{1}{4}.$

求めるべき式は次のように変形できるため，求める解は以下の通りである．

$$\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

(3) 連立不等式 $\begin{cases} 2\sin x \geqq \sqrt{2} & \ldots \text{式}(\alpha) \\ \sqrt{3}\tan x+1 < 0 & \ldots \text{式}(\beta) \end{cases}$ を解きなさい．ただし，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする．

［解］ $90^\circ < x \leqq 135^\circ.$

まずはそれぞれの式について不等式を解いていく．

式 (α) ： $\sin x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
$\therefore\ 45^\circ \leqq x \leqq 135^\circ$

式 (β) ： $\tan x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$
$\therefore\ 90^\circ < x < 150^\circ$

上記の 2 式の解が共に満たされる範囲が求める連立方程式の解となることから，$90^\circ < x \leqq 135^\circ$ となる．

III. 赤色，青色，黄色の 3 色のサイコロを振るとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 目の出方は何通りあるか求めなさい．

［解］　216 通り．

各サイコロの出目は，1〜6 までの 6 通りのため，求める出目の総数は，$6^3 = 36 \times 6 = 216$ 通り．

(2) すべてのサイコロの出目が偶数となるのは何通りか求めなさい．

［解］　27 通り．

各サイコロにおける偶数の出目は，2，4，6 の 3 通りのため，求める出目の総数は，$3^3 = 27$ 通り．

(3) 赤色の出目を百の位，青色の出目を十の位，黄色の出目を一の位とする 3 桁の整数が奇数となるのは何通りか求めなさい．

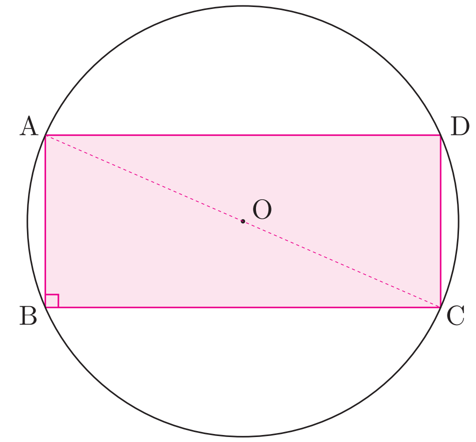
［解］　108 通り．

奇数とは，一の位が 1，3，5 の 3 通りであれば良く，十の位や百の位は任意の出目（各 6 通り）で良いため，
求める出目の総数は，$3 \times 6^2 = 3 \times 36 = 108$ 通り．

IV. 次の各問いに答えなさい．

(1) 直径 10cm の円に内接する長方形の内，面積が最大となるものはどのようなものか．
2 つの辺の長さ x, y をそれぞれ求めなさい．ただし，$x \leqq y$ とする．

［解］　$x = 5\sqrt{2}$,　$y = 5\sqrt{2}$.



右図のように内接する長方形 ABCD について考えるが，
辺 AB の長さを a，辺 BC の長さを b とする．

円周角 $\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ であることから，
$\angle\mathrm{AOC} = 180^\circ$ であり，対角線 AC は円の中心 O を通る．
以上のことから，$a^2 + b^2 = 10^2$ となり，$b = \sqrt{100 - a^2}$ である．

したがって，求める長方形の面積を S とすると，
$S = a \times \sqrt{100 - a^2}$ と表せる．

上式の両辺を 2 乗すると，$S^2 = a^2(100 - a^2)$ となる．

（ここでは，$S > 0$ が最大値となる $a > 0$ の値を求めても，S^2 が最大となる
$a > 0$ を求めても同一であるから，S^2 が最大となる a の値を求める．）

$a^2 = X$ とおくと，
$S^2 = -X^2 + 100X = -(X - 50)^2 + 250$ となる．（ただし，$0 < X < 100$）

$\therefore$　$X = 50$ のとき，S^2 が最大値を取る．したがって，$a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ となる．

また，$b = \sqrt{100 - a^2} = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$ と求められる．

求める x, y は条件として，$x \leqq y$ があるが，上記で求めた a, b は同じ値のため，どちらを x, y にしても良い．

(2) 袋の中に，赤い玉が 4 個，白い玉が 3 個入っている．
ここから 3 個の玉を取りだすとき，赤い玉が 2 個以上含まれている確率を求めなさい．

［解］　$\dfrac{22}{35}$.

まずは，7 個の玉から 3 個を選ぶ組み合わせを考えると，${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = 7 \times 5 = 35$ 通りと求められる．

赤玉が 2 個以上とは，赤玉が 3 個中 2 個，または赤玉が 3 個中 3 個の場合である．
したがって，赤玉が 2 個（すなわち残りは白玉 1 個）の組み合わせは，
${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = 6 \times 3 = 18$ 通り．

赤玉が 3 個（すなわち残りは白玉 0 個）の組み合わせは，${}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_0 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \dfrac{3!}{0!(3-0)!} = 4 \times 1 = 4$ 通り．

以上から，求める確率は，$\dfrac{18+4}{35} = \dfrac{22}{35}$ と求められる．

受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

V. 次の各問いに答えなさい．

(1) 以下の表は4名の生徒の科目A，科目Bの試験成績である．
科目Aと科目Bの相関係数を求めなさい．

表．科目Aと科目Bの試験成績

学生	佐藤	鈴木	高橋	田中
科目A	80	60	70	70
科目B	95	85	75	85

［解］　0.5.

相関係数 $r = \dfrac{\text{科目Aと科目Bの共分散}}{\text{科目Aの標準偏差} \times \text{科目Bの標準偏差}}$ で求められる．

まず，科目A，科目Bの算術平均は，科目A$=70$，科目B$=85$と求められる．

次に共分散 s_{ab} は，以下の通り求められる．

$$\begin{aligned} s_{ab} &= \frac{1}{4}\{(80-70)(95-85)+(60-70)(85-85)+(70-70)(75-85)+(70-70)(85-85)\} \\ &= \frac{1}{4}\{10\cdot 10+(-10)\cdot 0+0\cdot(-10)+0\cdot 0\} \\ &= \frac{1}{4}(100+0+0+0)=25. \end{aligned}$$

さらに，科目Aと科目Bの分散 s_a^2，s_b^2 をそれぞれ以下の通り求める．

$$\begin{aligned} s_a^2 &= \frac{1}{4}\left\{(80-70)^2+(60-70)^2+(70-70)^2+(70-70)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}(100+100+0+0)=50. \\ s_b^2 &= \frac{1}{4}\left\{(95-85)^2+(85-85)^2+(75-85)^2+(85-85)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}(100+0+100+0)=50. \end{aligned}$$

上記から，求める相関係数は，$r = \dfrac{25}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}} = \dfrac{25}{50} = \dfrac{1}{2} = 0.5$ となる．

(2) 10進数51を3進数で表しなさい．

［解］　$1220_{(3)}$.

3進数の各桁の重みで考えると，
$51_{(10)} = 27\times 1+9\times 2+3\times 2+1\times 0 = 3^3\times 1+3^2\times 2+3^1\times 2+3^0\times 0 = 1220_{(3)}$ と求められる．

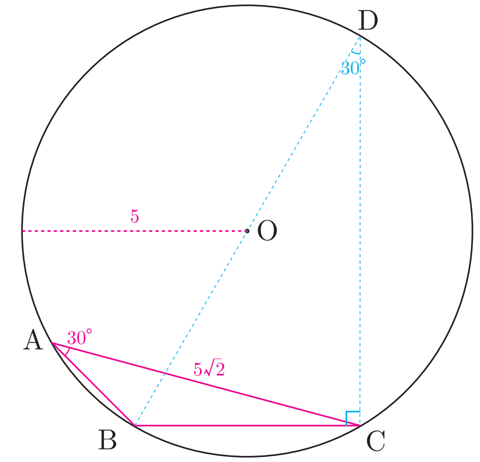
VI. 半径5の円に内接する△ABCにおいて，$\angle \mathrm{BAC}=30^\circ$，辺 $\mathrm{AC}=5\sqrt{2}$ であるとき，以下の各問いに答えなさい．

(1) 辺ABの長さを求めなさい．

［解］　5.

右図のように内接する△ABCについて考える．

正弦定理から，辺 $\mathrm{AB} = 2R\times\sin 30^\circ = 10\times\dfrac{1}{2} = 5$ と求められる．



(2) ∠ABCの角度を求めなさい．ただし，∠ABCは鈍角である．

［解］　135°.

上記同様に，正弦定理を用いると，$\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{5\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と求められる．

$\therefore$　$\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$または，$135^\circ$ となるが，条件として鈍角とあることから，ここでは，$\angle\mathrm{ABC}=135^\circ$ と求められる．