令和６年度 長岡大学 一般選抜Ⅱ期（数学）【解答例】

問題兼解答用紙は３枚です．すべての問題兼解答用紙に必ず受験番号，氏名を記入してください．

受験番号 ＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿

I. 次の各問いに答えなさい．

(1) $(x^2+4x-2)(x+2)$ を展開しなさい．

［解］ $x^3+6x^2+6x-4.$

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= x^3+4x^2-2x+2x^2+8x-4\\ &= x^3+6x^2+6x-4.\end{aligned}$$

(2) $4a-3b+6ab-2$ を因数分解しなさい．

［解］ $(2a-1)(3b+2).$

変数 a について整理をし，因数分解をする．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (4+6b)a-3b-2\\ &= 2a(3b+2)-(3b+2)\\ &= (2a-1)(3b+2).\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ を有理化しなさい．

［解］ $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}.$

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{5-2}\\ &= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

II. 次の各問いに答えなさい．

(1) 連立不等式 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{3} \leqq \dfrac{2x-1}{6} & \ldots\text{式}\,(\alpha)\\ 3(x-1) \leqq x+5 & \ldots\text{式}\,(\beta)\end{cases}$ を解きなさい．

［解］ $1 \leqq x \leqq 4.$

まずはそれぞれの式について不等式を解いていく．

$$\text{式}\,(\alpha):\ \begin{aligned}3-2x &\leqq 2x-1\\ 4 &\leqq 4x\\ x &\geqq 1.\end{aligned}$$

$$\text{式}\,(\beta):\ \begin{aligned}3x-3 &\leqq x+5\\ 2x &\leqq 8\\ x &\leqq 4.\end{aligned}$$

上記の２式の解が共に満たされる範囲が求める連立方程式の解となることから，$1 \leqq x \leqq 4$ となる．

(2) 関数 $y=x(x-1)$ の最小値を求めなさい．

［解］ $-\dfrac{1}{4}\quad\left(x=\frac{1}{2}\text{のとき}\right).$

$$\begin{aligned}y &= x(x-1)\\ &= x^2-x\\ &= x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

上記から，放物線の頂点が $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$ であることが求められる．

【別解】数学　の知識である微分を用いて極値を求めても良い．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x-1)+x\\ &= 2x-1 \quad = \quad 0\\ \therefore\ x &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

したがって，最小値は $x=\dfrac{1}{2}$ のときの，$y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)=-\dfrac{1}{4}$ である．

(3) 今日 2024 年２月 23 日の 10 年後である 2034 年２月 23 日は何曜日か答えなさい．

［解］ 木曜日．

2024 年２月 23 日は金曜日である．

そして，10 年後が何日後かを考えると，基本的に１年間は 365 日であるため 10 年分で 3,650 日である．
一方，２月 29 日がある「うるう年」は 10 年の間に，2024 年，2028 年，2032 年の３回があるため，
2034 年２月 23 日は今日から 3,653 日後である．

１週間は７日間であるため７の余りを求めることで曜日を計算可能になる．

$3,653 \div 7 = 521 \ldots 6.$

すなわち金曜日から６日後の曜日の木曜日が求める解となる．

受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

III. 次の各問いに答えなさい．

(1) $90^\circ < \theta < 120^\circ$ とするとき，以下の式の絶対値を外し $\sin\theta$ と数値のみの式となるよう簡単にしなさい．

$$|\sin\theta - 1| + \left|-2\sin(180^\circ - \theta) + \sqrt{2}\right| - \left|\frac{\sin\theta}{2} + 3\right|$$

［解］ $\dfrac{\sin\theta}{2} - 2 - \sqrt{2}.$

与えられた θ の条件から $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($\fallingdotseq 0.866) < \sin\theta < 1$ となることを踏まえて絶対値をすべて外し簡単化する．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= |\sin\theta - 1| + \left|-2\sin\theta + \sqrt{2}\right| - \left|\frac{\sin\theta}{2} + 3\right| \\ &= (-\sin\theta + 1) + \left(2\sin\theta - \sqrt{2}\right) - \left(\frac{\sin\theta}{2} + 3\right) \\ &= \frac{\sin\theta}{2} - 2 - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

(2) 5 人の生徒に数学の試験を実施したところ，95 点，60 点，75 点，90 点，80 点の成績だった．
この試験の標準偏差を求めなさい．

［解］ $5\sqrt{6}.$

$$\text{平均 } \overline{x} = \frac{1}{5}(95 + 60 + 75 + 90 + 80) = \frac{400}{5} = 80.$$

$$\text{分散 } \sigma^2 = \frac{1}{5}\left\{(95-80)^2 + (60-80)^2 + \cdots + (80-80)^2\right\} = \frac{225 + 400 + 25 + 100 + 0}{5} = \frac{750}{5} = 150.$$

したがって，求める標準偏差 $\sigma = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}.$

IV. トランプの各マーク ♠, ♣, ♡, ◇ の 2, 3, 4, 5 の 4 種類の数字のカードのみ，計 16 枚を利用して，4 人でゲームをすることにする．そのため，トランプを良く切った上で，4 人それぞれに 4 枚ずつ配った．
次の各問いに答えなさい．

(1) 自分に配られたカードがすべて同じマークになる確率を求めなさい．

［解］ $\dfrac{1}{455}.$

16 枚の中から 4 枚のカードが配られる組合せは，${}_{16}\mathrm{C}_4 = \dfrac{16!}{4! \cdot (16-4)!} = \dfrac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 14 \times 13.$

そのうち，すべて同じマークになる組合せは，♠, ♣, ♡, ◇ の 4 通りであるから，

求める解は，$\dfrac{4}{10 \times 14 \times 13} = \dfrac{2}{910} = \dfrac{1}{455}.$

【別解】最初に配られたあるマークのカードと残り 3 枚が同じ確率を考えても良い．

$$4 \times \left(\frac{4}{16} \times \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{455}.$$

（4 種類のマーク × 特定のマークを 4 回連続引く確率）.

(2) 自分に配られたカードの内，同じ数字のカードが 2 枚以上になる確率を求めなさい．

［解］ $\dfrac{391}{455}.$

「同じ数字のカードが 2 枚以上」という条件は，同じ数字のカードが 2 枚の場合や，3 枚の場合，4 枚の場合，また同じ数字のカード 2 枚が 2 組の場合と様々な場合を考える必要がある．
そのため「すべて異なる番号ではない」と考えれば良い．

「すべて異なる番号」の場合は,「2, 3, 4, 5」であるため，まずはこの順番でカードを引く確率を考えると，
$\dfrac{4}{16} \times \dfrac{4}{15} \times \dfrac{4}{14} \times \dfrac{4}{13}$ と求められる．

ただし，今回の条件ではカードが配られる順番は関係ないため，順番を入れ替えた順列分の組み合わせも考慮するため，4 つの数字の並びの順列は $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ 通りである．

すなわち,「すべて異なる番号」となる確率は，

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times \frac{4}{16} \times \frac{4}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{4}{13} = \frac{4^5}{16} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{14} \times \frac{1}{13} = 4^3 \times \frac{1}{455} = \frac{64}{455}.$$

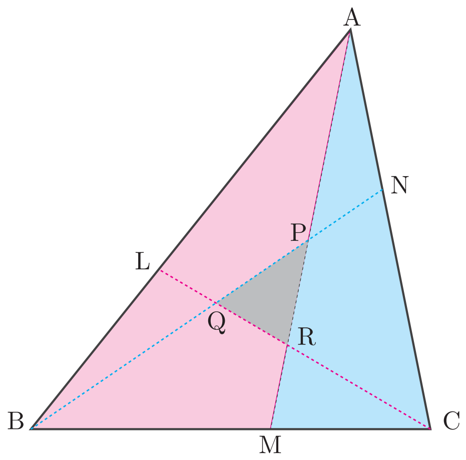
したがって，今回求めるべき「同じ数字のカードが 2 枚以上」となる確率は，$1 - \dfrac{64}{455} = \dfrac{391}{455}$ となる．

問題兼解答用紙は３枚です．すべての問題兼解答用紙に必ず受験番号，氏名を記入してください．

受験番号 ________________　氏名 ________________

V. △ABC において，辺 AB，辺 BC，辺 CA を 3 : 2 に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，線分 AM と線分 BN，線分 BN と線分 CL，線分 CL と線分 AM の交点をそれぞれ P，Q，R とする．△ABC の面積を 1 とするとき，△PQR の面積を求めなさい．

［解］ $\dfrac{1}{19}$.



最初に比 AP : PR : RM を求める．

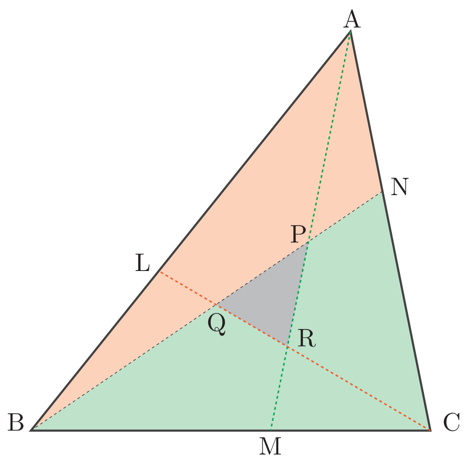
△ABM と線分 CL によるメネラウスの定理を用いると，

$\dfrac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CM}}\cdot\dfrac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RA}}=1$ が得られる．すなわち，$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RA}}=\dfrac{15}{4}\cdot\dfrac{\mathrm{MR}}{\mathrm{RA}}=1.$

同様に，△ACM と線分 BN によるメネラウスの定理を用いると，

$\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BM}}\cdot\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PA}}=1$ が得られる．すなわち，$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PA}}=\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PA}}=1.$

したがって，上記の 2 つの式から，AM の長さを 19 と考えると，簡単に比が計算でき，比 AP : PR : RM = 10 : 5 : 4 と求められる．



同様に，$\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AN}}\cdot\dfrac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{15}{4}\cdot\dfrac{\mathrm{NP}}{\mathrm{PB}}=1$

$\dfrac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CN}}\cdot\dfrac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{QB}}=1$

したがって，比 BQ : QP : PN = 10 : 5 : 4 と求められる．

以上のことから，

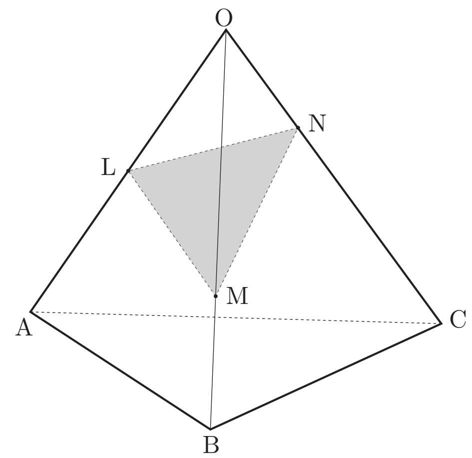
$\triangle\mathrm{ABM}=\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{5}.$

$\triangle\mathrm{BRP}=\dfrac{5}{19}\triangle\mathrm{ABM}=\dfrac{5}{19}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{19}.$

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{5}{15}\triangle\mathrm{BPR}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{19}=\dfrac{1}{19}.$

VI. 1 辺の長さが 6 の正四面体 OABC がある．辺 OA の中点を L，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を M，辺 OC を 1 : 2 に内分する点を N とするとき，△LMN の面積を求めなさい．

［解］ $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.



まずは，正四面体の 1 辺の長さが 6 であるため，
辺 OL = 3，辺 OM = 4，辺 ON = 2 と求められる．

次に，△OLM，△OMN，△OML に余弦定理を用いると，以下の通り
各辺の長さが求められる．

$\mathrm{LM}^2=\mathrm{OL}^2+\mathrm{OM}^2-2\cdot\mathrm{OL}\cdot\mathrm{OM}\cdot\cos 60^\circ=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}=13.$

$\mathrm{MN}^2=\mathrm{OM}^2+\mathrm{ON}^2-2\cdot\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}\cdot\cos 60^\circ=16+4-2\cdot4\cdot2\cdot\dfrac{1}{2}=12.$

$\mathrm{NL}^2=\mathrm{ON}^2+\mathrm{OL}^2-2\cdot\mathrm{ON}\cdot\mathrm{OL}\cdot\cos 60^\circ=4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=7.$

以上から，△LMN の 3 辺の長さが分かっているため，cos ∠LMN の値を余弦定理から求める．

$\cos\angle\mathrm{LMN}=\dfrac{\mathrm{LM}^2+\mathrm{MN}^2-\mathrm{ML}^2}{2\cdot\mathrm{LM}\cdot\mathrm{MN}}=\dfrac{13+12-7}{2\cdot\sqrt{13}\cdot2\sqrt{3}}=\dfrac{18}{4\sqrt{39}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\sin^2\angle\mathrm{LMN}=\dfrac{52-27}{52}=\dfrac{25}{52}.$　$\therefore\ \sin\angle\mathrm{LMN}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}.$

($0^\circ<\angle\mathrm{LMN}<180^\circ$ のため，$\sin\angle\mathrm{LMN}>0$.)

以上のことから，

△LMN の面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{LM}\cdot\mathrm{ML}\cdot\sin\angle\mathrm{LMN}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot2\sqrt{3}\cdot\dfrac{5}{2\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}.$

ヘロンの公式 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で求められなくもないが，各辺の長さに根号が含まれているため，
上記の計算の方が簡単に求められる．

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\\
&= \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\\
&= \text{(省略)}\\
&= \frac{a^2(2b^2+2c^2-a^2)-(b^2-c^2)^2}{4^2}.
\end{aligned}$$

ここで，$a^2=13$，$b^2=12$，$c^2=7$ を上式に代入すると，

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{13\cdot(24+14-13)-(12-7)^2}{4^2}=\frac{13\times25-5^2}{4^2}=\frac{12\times25}{4^2}.\\
\therefore\ S &= \frac{5\sqrt{12}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$