令和5年度 長岡大学 一般選抜 III 期（数学）【解答例】

問題兼解答用紙は3枚です．すべての問題兼解答用紙に必ず受験番号，氏名を記入してください．

受験番号 ____________ 氏名 ____________

I. 次の各問いに答えなさい．

(1) $5(a+b+c)^2$ を展開しなさい．

［解］ $5a^2+5b^2+5c^2+10ab+10bc+10ac.$

$X=b+c$ と置くと，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 5(a+X)^2\\
&= 5(a^2+2aX+X^2)\\
&= 5\{a^2+2a(b+c)+(b^2+2bc+c^2)\}\\
&= 5(a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2)\\
&= 5a^2+5b^2+5c^2+10ab+10bc+10ac.
\end{aligned}
$$

(2) $(2x^2+9x)^2-(2x^2+9x)-20$ を因数分解しなさい．

［解］ $(2x+1)(2x-1)(x+5)(x+4).$

$X=2x^2+9x$ と置き，たすき掛けを考える．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= X^2-X-20\\
&= (X-5)(X+4)\\
&= (2x^2+9x-5)(2x^2+9x+4).
\end{aligned}
$$

さらに，因数分解ができるか考えると，両方の項ともできるためさらに因数分解をする．

$$
\begin{aligned}
&= (2x^2+9x-5)(2x^2+9x+4)\\
&= (2x-1)(x+5)\cdot(2x+1)(x+4)\\
&= (2x+1)(2x-1)(x+5)(x+4).
\end{aligned}
$$

(3) $\sqrt{168n}$ が自然数となるような最小の自然数 n を求めなさい．

［解］ $n=42.$

$\sqrt{168n}$ が自然数ためには，$168n$ が平方数になれば良い．

それを確認するために，168 を素因数分解すると，$2^3\times3\times7$ のため，
$168n$ を平方数とするためには，$n=2\times3\times7$ とすることで，$168n=2^4\times3^2\times7^2$ とできる．
したがって，求める $n=2\times3\times7=42.$

II. 次の各問いに答えなさい．

(1) 色の異なる6個のボールを，異なる3つの箱A，B，Cに入れて収納する．
ボールを1個も入れない箱があっても良いとすると，何通りの入れ方があるか求めなさい．

［解］ $n=729$ 通り．

ボールを　　　　　として考えると，それぞれのボールをA〜Cのいずれかに入れると考えれば良い．
すなわち，すべて箱Aに入れる場合は，A A A A A A となり，　だけを箱Bに入れる場合は，A A A A A B となる．

したがって，　はA，B，Cの3通りがあり，　から　までも同様にA，B，Cの3通りがあるため，
求める解は $3^6=9^3=81\times9=729.$ となる．（重複順列）

(2) 方程式 $2\sin(\theta+45^\circ)=1$ を満たす θ の値を求めなさい．ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq135^\circ$ とする．

［解］ $\theta=105^\circ.$

まずは，$X=\theta+45^\circ$ と考え，X について方程式を解く．

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta+45^\circ) &= \frac{1}{2}.\\
\sin X &= \frac{1}{2}. \qquad \therefore \quad X=30^\circ,\ 150^\circ.
\end{aligned}
$$

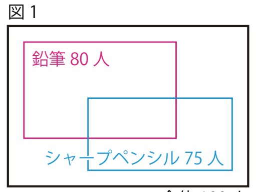
$X=\theta+45^\circ=30^\circ$ の場合は，$\theta=-15^\circ=345^\circ$ は，条件を満たさない．
$X=\theta+45^\circ=150^\circ$ の場合は，$\theta=105^\circ$ となり，これは条件を満たしているため，$\theta=105^\circ$ が解となる．

(3) 受験生数が100人いる試験会場で筆記用具の利用調査を行ったところ，鉛筆を持参した人が80人，シャープペンシルを持参した人が75人いた．
鉛筆とシャープペンシルの両方とも持参した人数を x 人とするとき，x の取りうる最大値と最小値をそれぞれ求めなさい．

［解］ 最大値：75人，最小値：55人．

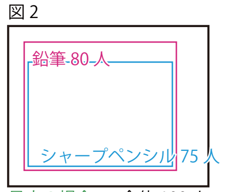
問題文の条件を図示すると，右の図1のようになる．
また，100人全体の集合を U，
鉛筆持参の集合を A，
シャープペンシル持参の集合を B と表現する．

図1



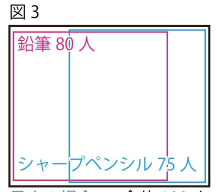
全体 100 人

図2



最大の場合　全体 100 人

図3



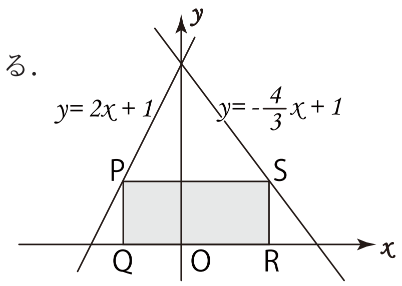
最小の場合　全体 100 人

両方とも持参した人数の最大値は，図2に示す通り，$A\supset B$ となり，$n(A\cap B)=75$ 人が解となる．
また，両方とも持参した人数の最小値は，図3に示す通り，$\overline{A\cup B}=\phi$ となり，
$100-n(A\cap B)=55$ 人が解となる．

III. 次の各問いに答えなさい．

(1) 2 直線 $y = 2x + 1$, $y = -\frac{4}{3}x + 1$ と x 軸 で囲まれた部分に，
長方形 PQRS を右図のように Q，R が x 軸上にあるように内接させる．

このとき，長方形 PQRS の面積が最大となるときの
面積と線分 QR の長さをそれぞれ求めなさい．



［解］　長方形 PQRS の面積：$\frac{5}{16}$，　線分 QR の長さ：$\frac{5}{8}$.

点 R の座標を $(x_0, 0)$ と置くと，各点の座標はそれぞれ以下の通り順に求められる．ただし，$0 < x_0 < \frac{3}{4}$.

点 S の座標：$\left(x_0, -\frac{4}{3}x_0 + 1\right)$，

点 P の座標：$\left(-\frac{2}{3}x_0, -\frac{4}{3}x_0 + 1\right)$，　($\because y = -\frac{4}{3}x_0 + 1$ を $y = 2x + 1$ に代入し，x について解く．)

点 Q の座標：$\left(-\frac{2}{3}x_0, 0\right)$．

したがって，求める長方形 PQRS の面積を y とすると，以下の式で表される．

$$y = \text{線分 QR} \times \text{線分 RS} = \left(x_0 + \frac{2}{3}x_0\right) \times \left(-\frac{4}{3}x_0 + 1\right) = \frac{5}{3}x_0\left(-\frac{4}{3}x_0 + 1\right) = -\frac{20}{9}\left(x_0^2 - \frac{3}{4}x_0\right).$$

上記式は，下に凸の 2 次関数であり，この最大値を求めるために標準形に変形すると，

$$y = -\frac{20}{9}\left\{\left(x_0 - \frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right\} = -\frac{20}{9}\left(x_0 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{20}{9} \times \frac{9}{64} = -\frac{20}{9}\left(x_0 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{5}{16}.$$

したがって，最大の面積は $x_0 = \frac{3}{8}$のときの $\frac{5}{16}$ である．

また，線分 QR の長さは $\frac{5}{3}x_0$より，$\frac{5}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$となる．

(2) 地上から野球のボールを時速 126km（秒速 35m）で真上に投げ上げたとき，t 秒後のボールの高さ y[m] は，$y = -5t^2 + 35t$ の式で表されるものとする．
ボールが最高地点に到達するのは，投げ上げてから何秒後か求めなさい．また，その高さを求めなさい．

［解］　秒数：$\frac{7}{2}$秒後，　高さ：$\frac{245}{4}$m.

問題文に与えられた式から，
横軸に時間 t を取り，縦軸に t 秒後のボールの高さ y を取ると，そのグラフは放物線となる．

すなわち，最高到達地点は前述の放物線の頂点となることから，頂点を求めれば良いことになる．

したがって，$y = -5\left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{49}{4}$ より，求める解として，$\frac{7}{2}$秒後に最高地点$\frac{245}{4}$[m] に到達する．

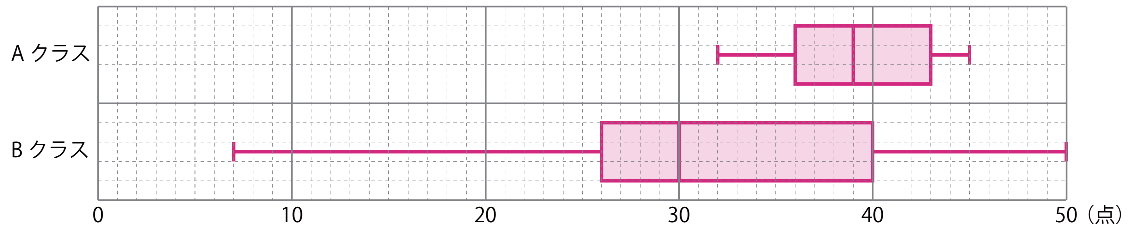
IV. 次の各問いに答えなさい．

(1) 次の表は，ある学校の A クラスと B クラスからそれぞれ選ばれた 10 名の試験結果（50 点満点，単位：点）である．2 つのクラスの箱ひげ図をそれぞれ以下の領域に並べてかきなさい．
なお，平均値は記入しなくて良い．

表．A クラスと B クラス 各 10 名の試験結果一覧

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平均点
A クラス	36	39	34	36	40	44	45	43	39	32	38.8
B クラス	26	36	25	28	32	50	7	49	40	27	32.0

（答）



［解］　上記の通り．

各クラス 10 名の成績を昇順に並べると以下の通りとなり，そこから箱ひげ図を描けばよい．

A クラス：32，34，36，36，39，39，40，43，44，45．
B クラス：　7，25，26，27，28，32，36，40，49，50．

(2) 模擬試験などでよく用いられる偏差値とは，それぞれの試験において平均点やデータのバラつきが異なるため，比較しやすくするために，平均点が 50 点，標準偏差が 10 点となるよう変換した数値のことである．

ある年の「大学入学共通テスト」の国語（200 点満点）の平均点は 106.0 点，標準偏差が 32.0 点であった．ある受験者の国語の得点が 130 点だったとき，この受験者の偏差値を求めなさい．

ただし，求めた答えが小数点以下の数値を含む場合は，小数点以下第 2 位を四捨五入し，小数点以下第 1 位までを答えなさい．

［解］　57.5.

この受験者の平均値との偏差は $130 - 106.0 = 24.0$ である．
また標準偏差 $\sigma = 32.0$ であるため，この受験者の偏差は$\frac{3}{4}\sigma$と表すことができる．

すなわち，求める偏差値 $= 50 + 10 \times \frac{3}{4} = 57.5$ となる．

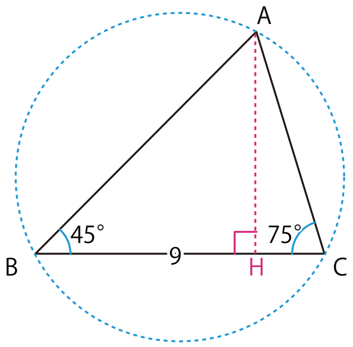
したがって，小数点以下第 2 位は 0 のため四捨五入し，解は 57.5 となる．

令和５年度 長岡大学 一般選抜Ⅲ期（数学）
問題兼解答用紙は３枚です．すべての問題兼解答用紙に必ず受験番号，氏名を記入してください．

受験番号 ________________　氏名 ________________

V. △ABC において，辺 BC = 9, ∠ABC = 45°, ∠BCA = 75° のとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 外接円の半径 R と辺 CA の長さをそれぞれ求めなさい．



［解］　半径 R の長さ：$3\sqrt{3}$,　辺 CA の長さ：$3\sqrt{6}$.

$\angle CAB = 180° - 45° - 75° = 60°$ と，辺 BC = 9 から正弦定理を用いて，

$2R = \dfrac{9}{\sin 60°} = 9 \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$　　$\therefore$　$R = 3\sqrt{3}.$

辺 CA の長さについては，正弦定理を用いたり，
その元となる円周角の性質と正弦の定理を用いることにより以下の通り求められる．

辺 $CA = 2R \cdot \sin 45° = 6\sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}.$

(2) $\sin 75°$ の値を求めなさい．

［解］　$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$

図のように点 A から辺 BC に対して垂線を引き，その交点を H とし，線分 BH の長さを x とおくと，
直角二等辺三角形や三平方の定理から以下の関係が成り立つ．

線分 HC の長さを $9-x$，線分 AH の長さを x，$x^2 + (9-x)^2 = (3\sqrt{6})^2$.

上記について x について解く．

$2x^2 - 18x + 81 - 54 = 2x^2 - 18x + 27 = 0$ を解の公式を用いて x について解くと，$x = \dfrac{9 \pm \sqrt{2 \times 27}}{2} = \dfrac{9 \pm 3\sqrt{3}}{2}.$

$BH = AH > CH$ より，　$x > \dfrac{9}{2}$ であるため，ここでの解は $x = \dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}$ となる．

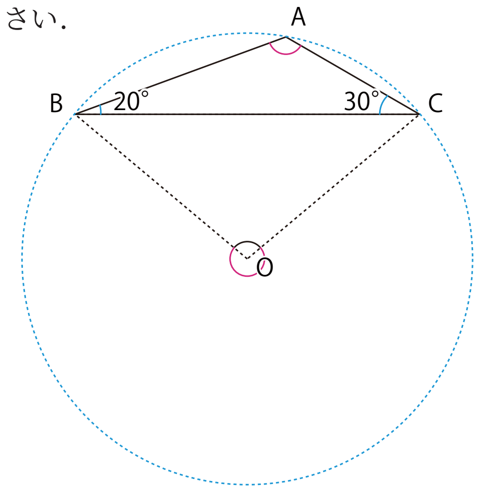
正弦の定義より，$\sin 75° = \dfrac{AH}{CA} = \dfrac{9+3\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{3\sqrt{6}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$

［別解 1］
数学　の知識を修得していれば，加法定理を用いて簡単に解答を導く可能性もある．

$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$

VI. 右の図のように，△ABC の外心を O とするとき，以下の各問いに答えなさい．

(1) ∠BOC の角度を求めなさい．



［解］　100°.

$\angle CAB = 180° - 20° - 30° = 130°.$

弦 BC に対する円周角 $\angle CAB = 130°$ より，
弦 BC に対する中心角は 260° となる．

したがって，求める角度 $\angle BOC = 360° - 260° = 100°.$

(2) 辺 AB の長さを x と置くとき，線分 BO の長さを x を用いた式で表しなさい．

［解］　$BO = x.$

線分 BO は，外接円 O の半径である．

したがって，正弦定理を用いると以下の通り表現できる．

$2 \times BO \cdot \sin 30° = x.$

$\therefore$　$2 \times BO \cdot \dfrac{1}{2} = BO = x.$