問題兼解答用紙は３枚です．すべての問題兼解答用紙に必ず受験番号，氏名を記入してください．

受験番号 ________________ 氏名 ________________

I. 次の各問いに答えなさい．

(1) $(a+b+c)(a-b-c)$ を展開しなさい．

［解］ $a^2-b^2-c^2-2bc.$

$X=b+c$ と置くと，

$$\begin{aligned}(与式) &= (a+X)(a-X)\\ &= a^2-X^2\\ &= a^2-(b^2+2bc+c^2)\\ &= a^2-b^2-c^2-2bc.\end{aligned}$$

(2) $x^2-4(xy+1)+4y^2$ を因数分解しなさい．

［解］ $(x-2y+2)(x-2y-2).$

$$\begin{aligned}(与式) &= x^2-4xy+4y^2-4\\ &= (x-2y)^2-4\\ &= (x-2y+2)(x-2y-2).\end{aligned}$$

(3) 連立不等式 $\begin{cases} x-1 & \leqq & 2(x-1) \\ 6-7x & \geqq & 4(x-4) \end{cases}$ を解きなさい．

［解］ $1 \leqq x \leqq 2.$

2 本の不等式をそれぞれ x について解いていく．

$2x-x \geqq -1+2$ から． $x \geqq 1$ … (i) となる．

$4x+7x \leqq 6+16$ から， $x \leqq 2$ … (ii) となる．

(i)，(ii) の共通部分が求める解となるため，$1 \leqq x \leqq 2$.

II. 次の各問いに答えなさい．

(1) 方程式 $|x-3|-|2x+1|=x$ を解きなさい．

［解］ $x=\dfrac{1}{2}.$

絶対値内の数式に応じ，以下の通り 3 通りの場合分けをする．

(i) $x \geqq 3$ のとき， $x-3-(2x+1)=x$ $2x=-4.$ $\therefore\ x=-2.$

$x=-2$ は, $x \geqq 3$ を満たさない，ここでの解はない．

(ii) $-\dfrac{1}{2} \leqq x < 3$ のとき， $-(x-3)-(2x+1)=x$ $-4x=-2.$ $\therefore\ x=\dfrac{1}{2}.$

(iii) $x<-\dfrac{1}{2}$ のとき， $-(x-3)+(2x+1)=x$ $x+4=x.$ $\therefore\ x$：解なし．

以上のことから，求める解は $x=\dfrac{1}{2}.$

(2) a, b を整数とするとき, a を 5 で割ると 2 余り, b を 5 で割ると 3 余る．
このとき, $2a-3b$ を 5 で割ったときの余りを求めなさい．

［解］ 0.

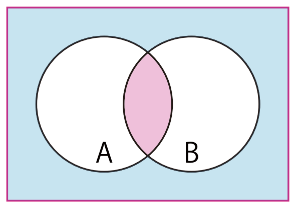
条件から，$a=5q+2,\quad b=5q'+3\quad (q,\ q'$: 整数)

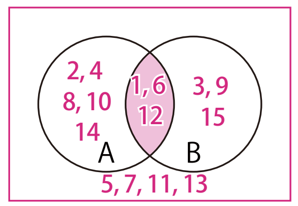
$2a-3b=2(5q+2)-3(5q'+3)=10q+4-15q'-9=10q-15q'-5=5(2q-3q'-1).$

したがって，求める余りは 0 である．

(3) 全体集合 $U=\{x \mid 1 \leqq x \leqq 15,\ x$ は整数$\}$ とする．
U の部分集合 $A=\{1,2,4,6,8,10,12,14\}$，$B=\{1,3,6,9,12,15\}$ とするとき，集合 $\overline{A\cup B}\cup\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$ を求めなさい．

［解］ $\{1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12,\ 13\}.$





$\overline{A\cup B}$ は，上図の水色部分の集合であり，$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$ は，ド・モルガンの法則から $\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}=A\cap B$ となり，
桃色部分の集合になる．

条件の各整数を集合に割り当てると，上記の右側の図のようになる．
以上から，求める集合 $\overline{A\cup B}\cup(A\cap B)=\{1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12,\ 13\}.$

受験番号 ______________ 氏名 ______________

III. 次の各問いに答えなさい．

(1) 2次不等式 $x^2 + ax + a > -3$ の解がすべての実数であるとき，定数 a の値の範囲を求めなさい．

［解］ $-2 < a < 6.$

与式を移項し整理すると，$x^2 + ax + a + 3 > 0$ となり，任意の x で 0 よりも大きければ良い．

したがって，任意の実数 x が解になるためには， $y = x^2 + ax + a + 3$ が x 軸と共有点を持たないようにすれば良い．すなわち判別式 $D < 0$ を満たすような a の範囲が解となる．

$D = a^2 - 4(a + 3) = a^2 - 4a - 12 = (a - 6)(a + 2) < 0.$ $\quad \therefore\ -2 < a < 6.$

(2) $4\cos\theta + 2\sin\theta = \sqrt{2}$のとき, $\tan\theta$の値を求めなさい．ただし, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$とする．

［解］ $-7.$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$であることから, $\sin\theta$, $\cos\theta$ をそれぞれ求めれば良い．

与式を $\sin\theta$のみの式とするため, $4\cos\theta = \sqrt{2} - 2\sin\theta$ $\quad \therefore\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2} - 2\sin\theta}{4}$と変形し，
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入する．

$\sin^2\theta + \left(\dfrac{\sqrt{2} - 2\sin\theta}{4}\right)^2 = 1.$ $\quad$ すなわち，$16\sin^2\theta + 2 - 4\sqrt{2}\sin\theta + 4\sin^2\theta = 16.$

式を整理すると，$20\sin^2\theta - 4\sqrt{2}\sin\theta - 14 = 2(10\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta - 7) = 0.$

$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 70}}{10} = \dfrac{\sqrt{2} \pm 6\sqrt{2}}{10}.$ したがって, $\sin\theta = \dfrac{-5\sqrt{2}}{10},\ \dfrac{7\sqrt{2}}{10}.$

ただし, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$のため, $\sin\theta \geqq 0$ であるから, $\sin\theta = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$となる．

与式 $4\cos\theta + 2\sin\theta = \sqrt{2}$に上記の $\sin\theta$を代入すると, $cos\theta + 2 \cdot \dfrac{7\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}.$ $\quad 4\cos\theta = \dfrac{5\sqrt{2}}{5} - \dfrac{7\sqrt{2}}{5} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{5}.$

$\therefore\ \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}.$

以上から，求める解 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{7\sqrt{2}}{10}}{-\frac{\sqrt{2}}{10}} = -7.$

IV. 次の各問いに答えなさい．

(1) 10 本のくじの中に当たりくじが 4 本ある．このくじを 3 本引いて 2 本以上当たる確率を求めなさい．ただし，一度引いたくじは戻さないものとする．

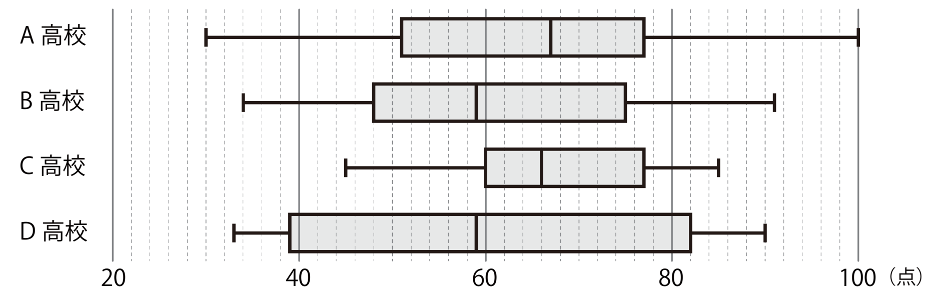
［解］ $\dfrac{1}{3}.$

2 本当たる事象を A, 3 本当たる事象を B とすると，

$P(A) = \dfrac{{}_4C_2 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = \dfrac{\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \times 6}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}.$ $\quad$ 同様に, $P(B) = \dfrac{{}_4C_3 \times {}_6C_0}{{}_{10}C_3} = \dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{30}.$

A と B は互いに排反のため，求める確率は, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$となる．

(2) 以下の箱ひげ図は A〜D の 4 つの高校で同一の学力試験を行った結果の分布をまとめたものである．この箱ひげ図から読み取れることとして正しい記述の文章を，以下の選択肢からすべて選び記号で答えなさい．



（ア）4 校の中では A 高校が一番受験者が多い．
（イ）B 高校の平均は 60 点以下である．
（ウ）C 高校の生徒の半分以上が 60 点以上を取っている．
（エ）点数の振れ幅が最も大きい学校は D 高校である．
（オ）C 高校と D 高校の受験者数が同数のとき，C 高校は D 高校と比較し 60 点以上の生徒が 1.5 倍以上いる．

［解］ （ウ)，(オ）．

（ア）誤り：箱ひげ図から人数は読み取れない．
（イ）誤り：図の箱ひげ図には中央値はあるが，平均値はないため読み取れない．
（ウ）正しい：第 1 四分位数が 60 点のため，75% の生徒が 60 点以上である．
（エ）誤り：最小値と最大値の差が最も大きい高校は A 高校である．
（オ）正しい：C 高校の 60 点以上の生徒は 75%．D 高校の 60 点以上の生徒は，中央値が 60 点未満のため 50% 未満．したがって，受験者数が同数と条件があることから 75% 以上はいる．

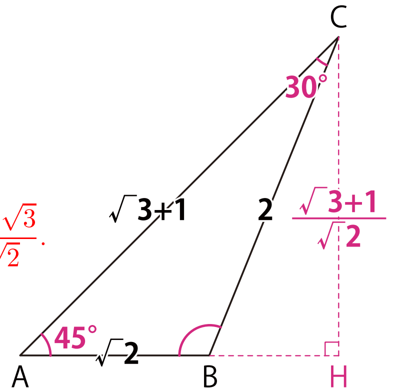
問題兼解答用紙は３枚です．すべての問題兼解答用紙に必ず受験番号，氏名を記入してください．

受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

V. △ABC において，辺 AB $= \sqrt{2}$，辺 BC $= 2$，辺 CA $= \sqrt{3}+1$ のとき，次の各問いに答えなさい．

(1) ∠ABC の角度を求めなさい．

［解］　$\angle \mathrm{ABC} = 105^\circ$.



条件を図示すると右図の通りとなる．

余弦定理を用いて，$\cos\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{2^2+\sqrt{2}^2-(\sqrt{3}+1)^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

ここからでは直接角度が求められないため，他の２角の角度を同様に余弦定理を用いて導くことによって解を求める．

$\cos\angle \mathrm{CAB} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+\sqrt{2}^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.　　$\therefore\ \angle \mathrm{CAB} = 45^\circ$.

$\cos\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-\sqrt{2}^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　$\therefore\ \angle \mathrm{BCA} = 30^\circ$.

したがって，$\angle \mathrm{ABC} = 180^\circ - \angle \mathrm{CAB} - \angle \mathrm{BCA} = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$.

(2) $\sin 75^\circ$の値を求めなさい．

［解］　$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

(1) から，点 C から線分 AB の延長線上に垂線を下した点を H とすると，△AHC は直角二等辺三角形になる．
また，$\angle \mathrm{CBH} = 75^\circ$であることから，定義より $\sin 75^\circ = \dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CB}}$で求められる．

線分 CH は直角二等辺三角形の性質から，$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ となる．

$\therefore\ \sin 75^\circ = \dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CB}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

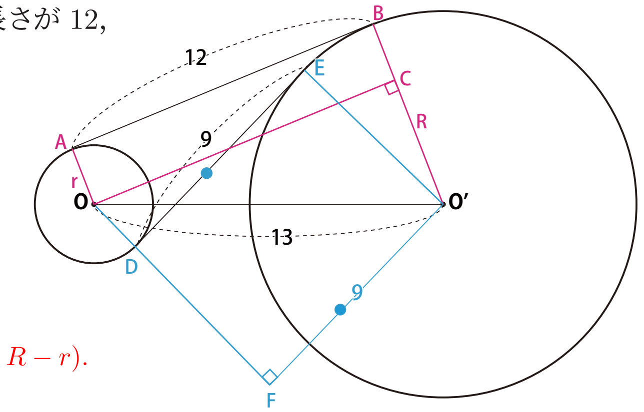
［別解１］
$\sin 75^\circ = \sin 105^\circ$のため，上記で求めたかもしれない余弦定理の値を用いて，
$\sin 105^\circ = \sqrt{1-\cos^2 105^\circ}$ として求めても良い．（$\sin 105^\circ > 0$ は自明．）

$$\sin 75^\circ = \sin 105^\circ = \sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{8-4+2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\frac{1+3+2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{2})^2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

［別解２］
数学　の知識を修得していれば，加法定理を用いて簡単に解答を導く可能性もある．

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

VI. 右の図のように，中心間の距離が 13，共通外接線の長さが 12，共通内接線の長さが 9 である２つの円 O, O′ がある．
円 O′ の半径を求めなさい．



［解］　$\dfrac{5+2\sqrt{22}}{2}$.

右図のように，円 O, O′ のそれぞれの半径を r，R とする．
共通外接線 AB に平行で，点 O を通る線分 OC を引くと，
三平方の定理より，$12^2 + \mathrm{O'C}^2 = 13^2$.　　$\therefore\ \mathrm{O'C} = 5\ (= R - r)$.

共通内接線 DE に平行で長さが 9 の，点 O′ を通る線分 O′F を引き，線分 OF も引くと，
三平方の定理より，$9^2 + \mathrm{OF}^2 = 13^2$.　　$\therefore\ \mathrm{OF} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}\ (= R + r)$.

以上から，求める円 O′ の半径 R は，$\dfrac{(R-r)+(R+r)}{2} = \dfrac{5+2\sqrt{22}}{2}$ となる．