令和５年度 長岡大学 一般選抜Ⅰ期　【解答例】

問題兼解答用紙は３枚です．すべての問題兼解答用紙に必ず受験番号，氏名を記入してください．

受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

I. 次の各問いに答えなさい．

(1) $(2a-1)(2a^2+a+2)$ を展開しなさい．

［解］　$4a^3+3a-2.$

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 4a^3+2a^2+4a-2a^2-a-2\\ &= 4a^3+3a-2.\end{aligned}$$

(2) $4x^2-7ax+12bx-21ab$ を因数分解しなさい．

［解］　$(4x-7a)(x+3b).$

たすき掛けによって $\begin{bmatrix} 4x & -7a \\ 1x & +3b \end{bmatrix}$ 単純に下記の通り因数分解可能.

$(\text{与式}) = (4x-7a)(x+3b).$

(3) 連立不等式 $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{6} > -\frac{1}{3}x+1 \\ \frac{1}{3}x+7 \leqq 2x+2 \end{cases}$ を解きなさい．

［解］　$x \geqq 3.$

2 本の不等式をそれぞれ x について解いていく.

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{6} > -\frac{1}{3}x+1$ の分母を払うと, $3x+1 > -2x+6$ となる.

$5x > 5$ から，　$x > 1$　... (i) となる.

$\frac{1}{3}x+7 \leqq 2x+2$ の分母を払うと, $x+21 \leqq 6x+6$ となる.

$-5x \leqq 15$ から，　$x \geqq 3$　... (ii) となる.

(i)，(ii) の共通部分が求める解となるため，$x \geqq 3$.

II. 次の各問いに答えなさい．

(1) 放物線 $y=-2x^2+4x-3$ の頂点の座標を求めなさい．

［解］　$(x, y) = (1, -1).$

与式を標準形にすると,
$y=-2(x^2-2x)-3=\{-2(x-1)^2+2\}-3=-2(x-1)^2-1.$
したがって，求める頂点の座標は $(x, y)=(1,-1)$.

(2) $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{3}$のとき，$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めなさい．ただし, $0^\circ<\theta<45^\circ$とする．

［解］　$\frac{\sqrt{17}}{3}.$

与えられた条件より，$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{9}$となり，左辺を展開すると，式を整理すると以下の通りとなる.

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}.$　　$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{9}.$

したがって，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9}.$　　$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{17}}{3}.$

条件 $0^\circ<\theta<45^\circ$ における正弦，余弦それぞれの値は $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ のため，$\sin\theta+\cos\theta>0$ となる.

したがって，求める解は $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

(3) あるバスケットボールチームは，女子８人，男子 10 人の男女混成チームである．そこから女子２人，男子３人を選ぶ方法は何通りあるか求めなさい．

［解］　$3,360$ 通り．

女子 8 人から 2 人を選ぶ組み合わせは，${}_8\mathrm{C}_2$ であり,
男子 10 人から 3 人を選ぶ組み合わせは，${}_{10}\mathrm{C}_3$ である.

したがって，求める組み合わせ数は,

$${}_8\mathrm{C}_2\times{}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{8!}{2!(8-2)!}\times\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\times\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=28\times10\times12=2,800+560=3,360.$$

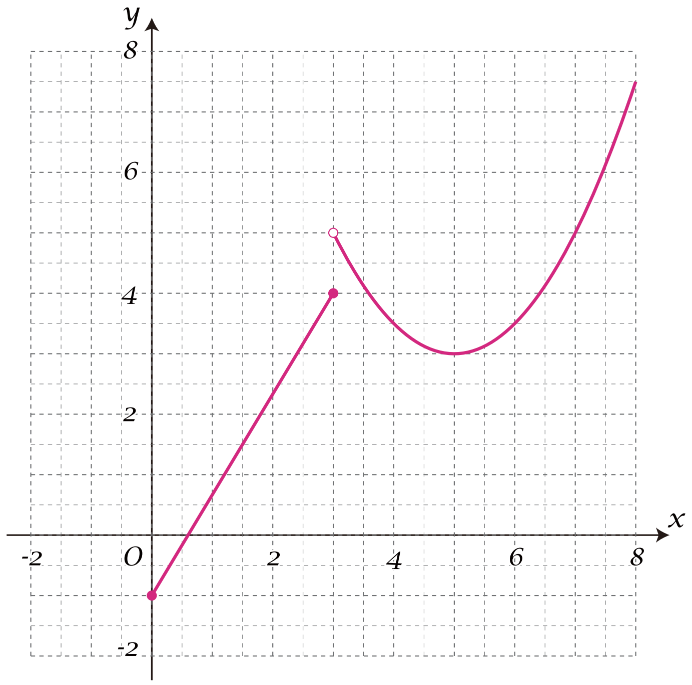
受験番号 ______________ 氏名 ______________

III. 次の各問いに答えなさい．

(1) 次の関数のグラフを右にかきなさい．

$$y = \begin{cases} \dfrac{5}{3}x \quad -1 & (0 \leqq x \leqq 3) \\ \dfrac{1}{2}x^2 \quad -5x \quad +\dfrac{31}{2} & (x > 3) \end{cases}$$

[注] フリーハンドで構わないが，x 座標，y 座標とも整数値を取るような特徴的な点については正確に解答すること．



上の１次関数は，傾き $\dfrac{5}{3}$，切片 -1 により記述する．

下の２関数は，標準形に変形し頂点（軸）を求めて記述する．

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{31}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 10x\right) + \frac{31}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x-5)^2 - 25\right\} + \frac{31}{2} \quad = \quad \frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{25}{2} + \frac{31}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-5)^2 + 3. \end{aligned}$$

以上から，頂点の座標が (5, 3) となる $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフをかけば良い．ただし，定義域は $x > 3$.

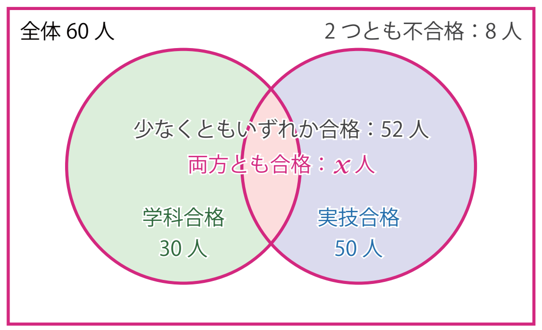
[注] 目安となる座標 (3, 5), (4, 3.5), (5, 3), (6, 3.5), (7, 5), (8, 7.5).

(2) ある資格は学科と実技の２つの試験がともに合格点に達していると取得できる．
この試験を 60 人が受験し，学科の合格点到達者数が 30 人，実技の合格点到達者数が 50 人で，２つとも合格点未達者が８人だった．
このときの資格取得者の人数を求めなさい．また，どちらかの試験だけ合格していた者の人数も求めなさい．

［解］ 資格取得者数：28 人， どちらかの試験だけの合格者数：24 人．

各種条件を右の通りベン図で表し，２つとも試験を合格した人数を x とすると以下の式が成り立つ．

学科試験のみの合格者数	：	$30 - x$ 人
実技試験のみの合格者数	：	$50 - x$ 人
両試験ともの合格者数	：	$52 - (30 - x) - (50 - x)$ 人

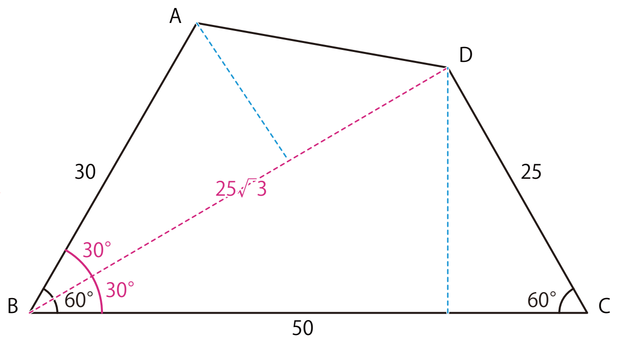


したがって，両試験ともの合格者数
$x = 52 - (30 - x) - (50 - x)$ を x について解くと，
$x = -28 + 2x$ となり，$x = 28$ と求められる．

上記から，学科試験のみの合格者数２人，実技試験のみの合格者数 22 人が求められ，
どちらかの試験のみの合格者数は 24 人となる．

(3) 四角形 ABCD において，辺 AB = 30, 辺 BC = 50, 辺 CD = 25, ∠ABC = ∠BCD = 60°のとき，四角形 ABCD の面積を求めなさい．

［解］ $500\sqrt{3}$.



値が比較的大きいため，５分の１の縮尺で考え，
最終的に５倍（面積の場合は 25 倍）して考える．

△BCD において余弦定理を用いると，
$BD^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5\cos 60^\circ = 125 - 100 \times \dfrac{1}{2} = 75.$
$\therefore$ BD $= 5\sqrt{3}$.

さらに，△BCD は，$2 : 1 : \sqrt{3}$ になっていることから，
∠DBC = 30° である．
（余弦定理から，cos∠DBC を求めると $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり,∠DBC = 30° と求めても良い． ）

上記から，∠ABD = 30° も求められる．

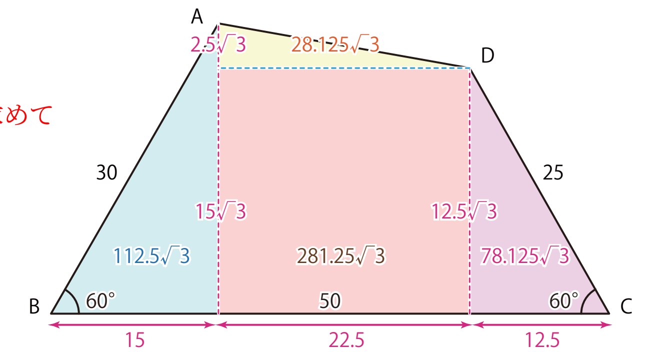
四角形 ABCD の面積 = △ABD の面積 + △BCD の面積として求める．

△ABD の面積 $= \dfrac{1}{2} \times \mathrm{BD} \times \mathrm{AB} \cdot \sin\angle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times 6 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}.$
同様に，
△BCD の面積 $= \dfrac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{BD} \cdot \sin\angle\mathrm{DBC} = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}.$

四角形 ABCD の面積 $= \dfrac{15\sqrt{3}}{2} + \dfrac{25\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ となる．
ただし，これは５分の１縮尺で求めているため，面積は 25 倍 (5^2倍) となり，最終的な解は $500\sqrt{3}$となる．

［別解］

右図のように，３つの三角形と１つの長方形に分割し，
三平方の定理（三角関数の定義）から，各辺の長さを求めて
４つの図形の合計として求めても良い．



IV. A さんと B さんが，バッティングセンターで１日 50 球のプレイを５日連続で行った．ヒット性の当たりの本数は，以下の表の通りである．次の各問いに答えなさい．

	１日目	２日目	３日目	４日目	５日目	合計
A	36	12	40	38	14	140
B	28	36	27	20	29	140

(1) A さんと B さんの標準偏差をそれぞれ求めなさい．

［解］　A さん：$2\sqrt{38} = \sqrt{152}$　　　B さん：$\sqrt{26}$.

標準偏差 $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ で求められる．

ちなみに，A さん，B さんの平均はいずれも $\dfrac{140}{5} = 28$ である．

したがって，A さんの標準偏差 σ_A は，

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sqrt{\frac{1}{5}\{8^2 + (-16)^2 + 12^2 + 10^2 + (-14)^2\}} = \sqrt{\frac{1}{5}(64 + 256 + 144 + 100 + 196)} \\ &= \sqrt{\frac{760}{5}} = \sqrt{152} = 2\sqrt{38}.\end{aligned}$$

同様に，B さんの標準偏差 σ_B は，

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sqrt{\frac{1}{5}\{0^2 + 8^2 + (-1)^2 + (-8)^2 + 1^2\}} = \sqrt{\frac{1}{5}(0 + 64 + 1 + 64 + 1)} \\ &= \sqrt{\frac{130}{5}} = \sqrt{26}.\end{aligned}$$

(2) ある社会人草野球チームで練習中に１人が怪我をしたため，来週行われる試合で選手が１人足りないことになり助っ人を呼ぶことになった．安定的な打撃を望むとき，データに基づけば A さんと B さんどちらを助っ人として呼ぶべきか答えなさい．また，その理由を説明しなさい．

［解］　B さん．

理由：A さん，B さんとも平均は一緒であるが，
B さんの方が標準偏差（分散）の値が小さいことから，打率５割６分０厘
（50 打数 28 安打）程度で安定した打撃が望めるため．

V. 次の各問いに答えなさい．

(1) $y = \sin^2\theta + \cos\theta - 1$ の最大値を求めなさい．また，その時の θ の値を求めなさい．
ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

［解］　最大値：$\dfrac{1}{4}$　　　θ の値：$60°$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて，与式を $\cos\theta$ のみに変形すると，$y = (1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 1$ となる．

$\cos\theta$ を x と置くと，　$y = -x^2 + x = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$ となる．　ただし，$-1 \leqq x \leqq 1$.

すなわち，上式の最大値は，$x = \dfrac{1}{2}$ のときの $\dfrac{1}{4}$ であり，かつ上記の x の範囲も満たしている．

ここで，$x = \cos\theta$ であり，かつ $0 \leqq \theta \leqq 180°$ であることから，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta = 60°$ である．

［別解］
数学　の知識を用いて解答しても良い．与式を微分して 0 になる θ を求めれば良い．

$y' = 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = \sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0.$
したがって，$\sin\theta = 0, \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となる．

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のときについては，上記の通り．

$\sin\theta = 0$ のときについては，具体的に数値を入れて確かめてみると，
$\theta = 0°$ のときは極値 $(y = 0)$ であり，$\theta = 180°$ のときは最小値 $(y = -2)$ であり，最大値ではないことがわかる．

(2) 当たり３本とはずれ６本のくじが入った箱から，１本ずつ順にくじを取り出す．２本目が当たりであるとき，１本目が当たりである確率を求めなさい．
ただし，１本目に取り出したくじはもとに戻さないものとする．

［解］　$\dfrac{1}{4}$.

１本目が当たりであることを事象 A，２本目が当たりであることを事象 B とすると，

求める条件付確率は $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ である．

２本目が当たりである確率 $P(B) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ である．

[注] 全体９本の内，３本が当たりのため，引くタイミングに寄らず期待値は $\dfrac{1}{3}$.
丁寧に求めれば，$\dfrac{3}{9} \times \dfrac{2}{8} + \dfrac{6}{9} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{24}{72} = \dfrac{1}{3}$.

$P(A \cap B)$ は上記の通り，$P(A \cap B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{12}$.

したがって，求める条件付確率は $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{12} \div \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$.